Área: CV ( ) CHSA ( ) ECET (X)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA – MEC

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PRPPG

Coordenadoria Geral de Pesquisa – CGP

Campus Universitário Ministro Petrônio Portela, Bloco 06 – Bairro Ininga

Cep: 64049-550 – Teresina-PI – Brasil – Fone (86) 215-5564 – Fone/Fax (86) 215-5560

E-mail: pesquisa@ufpi.br; pesquisa@ufpi.edu.br

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM UM AMBIENTE DE COMPUTAÇÃO PARALELA

Atécio Alves (bolsista do PIBIC/UFPI), Paulo Sérgio Marques dos Santos (Orientador, Depto de Matemática – UFPI)

INTRODUÇÃO

Inicialmente apresentaremos os conceitos básicos de otimização para resolver o problema

$$\min f(x),\ x \in R^n. \qquad (1.1)$$

onde a função $f : R^n \rightarrow R$ é diferenciável.

Em seguida apresentaremos métodos que geram uma sequência $\{x^k\}$ que, sob condições razoáveis, converge para a solução do problema (1.1). Serão tratados Métodos de Descida com técnicas de busca linear, Métodos de Direções Conjugadas e o Método de Newton. Mostraremos a análise de convergência e relataremos alguns testes numéricos feitos no SCILAB e em Linguagem C.

INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO

Dizemos que $v=\inf_{x \in R^n} f(x)$ é o valor ótimo do problema (1.1). Se f(x)=v, então x é denominado um minimizador global do problema (1.1).

Observação 1: Mesmo quando *v é* finito, pode não existir um minimizador para o problema (1.1). Por exemplo, $f(x)=e^x$, é fácil ver que $v=0$, mas não existe um $x \in R$ tal que f(x)=0

Para melhorar o entendimento, estudamos condições para existência de solução do problema (1.1). Uma condição necessária de primeira ordem é: $f'(x)=0$. Outras condições são analisadas.

MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO

Podemos resumir a apresentação dos métodos nos tópicos abaixo, omitindo a análise de convergência dos mesmos.

Métodos de descida

Dada uma aproximação $x^k \in R^n$ da solução do problema (1.1), queremos encontrar um ponto $x^{k+1} \in R^n$, tal que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$. Uma estratégia básica é tomar uma direção de descida $d^k \in R^n$ e um comprimento de passo $\alpha_k > 0$ que forneça: $f(x^k + \alpha_k d^k) < f(x^k)$ e obtemos $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$.

O Método de Newton

O método de Newton clássico é introduzido para o problema de encontrar um $x \in R^n$ tal que:

$$\Phi(x)=0, \qquad (3.1)$$

onde $\Phi: R^n \rightarrow R^n$ é diferenciável. Seja $x^k \in R^n$ uma aproximação da solução do problema (3.1), podemos aproximar $\Phi(x)=0$ pela sua linearização: $\Phi(x^k) + \Phi'(x^k)(x - x^k)=0$. Considerando f duas vezes diferenciável e f'' não-singular, tomando $f'(x)= \Phi(x)$ obtemos o iterando $x^{k+1} = x^k - (f''(x^k))^{-1}f'(x^k)$.

O Método dos Gradientes Conjugados

Seja $f: R^n \rightarrow R$, tal que $f(x)=x^TQx + q^Tx$, Q uma matriz definida positiva e $q \in R^n$. Seja: $x^{k+1}= x^k+ \alpha_k d^k$, $d^k = - f'(x^k) +\beta_{k-1} d^{k-1}$ e β_{k-1} calculado para satisfazer $(d^k)^TQd^{k-1} = 0$. O tamanho de passo α_k satisfaz $f(x^k+ \alpha_k d^k)=\min_{\alpha \in R} f(x^k+ \alpha d^k)$.

METODOLOGIA

Iniciamos com a leitura de [1,2] para entender as definições e resultados básicos de otimização, após a leitura foram realizados seminários de discussão para o desenvolvimento do projeto de pesquisa. Apresentamos no Ciclo de Palestras do Departamento de Matemática o seminário intitulado “O Teorema de Newton-Kantorovich para Sistemas de Equações Não-lineares em Espaços Euclidianos”.

Após o estudo teórico, iniciamos as implementações dos algoritmos analisados usando o SCILAB e a Linguagem C.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os testes ilustraram a performance dos algoritmos estudados em dois grupos de problemas. No primeiro grupo, usamos as matrizes do repositório de problemas-testes Matrix Market disponíveis em [3]. No segundo grupo, geramos matrizes randomicamente variando a dimensão do problema.

Nos dois casos, resolvemos o problema: Encontrar $x \in Rn$ tal que $Ax = b$, encontrando solução para o problema (1.1), onde $f(x)=x^TQx + q^Tx$.

Como amostra de nossas experiências, apresentamos duas tabelas:

Tabela 1: Problemas do Matrix Market

Problema	n	k	$\|x^k - x^*\|^2$	cpu(s)
bcsstk14	1806	17984	$9.490D - 04$	$23,9100$
bcsstk15	3948	25634	$8.560D - 04$	64.9216

E com matrizes geradas randomicamente:

Tabela 2: Método de Newton

n	k	$\|Ax^k - b\|$
50	2	1.685D-09
100	2	2.271D-10
200	2	6.114D-09
300	16	8.505D-09
400	1771	9.147D-09

CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos o Problema de Otimização Irrestrito, suas propriedades e alguns métodos computacionais para resolvê-lo. Realizamos testes com problemas de pequeno e médio porte usando o SCILAB e a Linguagem C como ferramentas de desenvolvimento.

Os testes foram coletados da literatura e, também, gerados randomicamente para garantir a validade de nossos resultados.

A ideia de usar Programação Paralela para resolver os problemas de otimização, não foi implementada devido às dificuldades que surgiram na configuração de nosso laboratório de testes.

Os testes com algoritmos seqüenciais nos permitiram entender melhor toda a teoria estudada, de modo a viabilizar uma continuação de nossa pesquisa com passos firmes.

APOIO: UFPI

REFERÊNCIAS

[1] IZMAILOV, A., SOLODOV,M. Otimização, volume I, 2 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[2] IZMAILOV, A., SOLODOV, M. Otimização, volume II, Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[3] http://math.nist.gov/MatrixMarket/